# Γενικά Επαναληπτικά Διαγωνίσματα 9-12 περιόδου 2020-21 από το Askisopolis


**Συμμετέχουν οι μαθηματικοί:**

**Στέλιος Μιχαήλογλου | Δημήτρης Πατσιμάς**

**Βαγγέλης Ραμαντάνης | Αποστόλης Κακαβάς**

**Άγγελος Μπλιάς | Νίκος Τούντας**


Ασκησόπολις
ο πιο πλούσιος κόσμος
θεμάτων και ασκήσεων

# 9ο Διαγώνισμα

## Θέμα Α

**Α1.** Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x)=\alpha^x$, $\alpha>0$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει

$f'(x)=\alpha^x \ln\alpha$, δηλαδή $\left(\alpha^x\right)'=\alpha^x \ln\alpha$.

μονάδες 7

**Α2.** Να διατυπώσετε το κριτήριο παρεμβολής.

μονάδες 4

**Α3.** Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:

« Αν η μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα σημείο $x_0$ του πεδίου ορισμού της, τότε είναι και παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό».

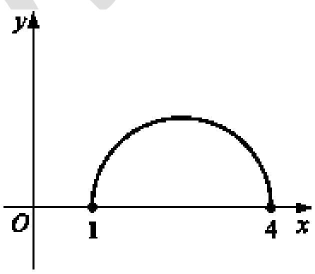
**α)** Είναι αληθής, ή ψευδής η πρόταση;

**β)** Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α.

μονάδες 1+3

**Α4.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη Σωστό, αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

Αν γραφική παράσταση της συνάρτησης f δίνεται από το παρακάτω σχήμα, τότε:




**α)** το πεδίο ορισμού της $\frac{1}{f'}$ είναι το $(1,4)$.

**β)** το πεδίο ορισμού της $\frac{1}{f'}$ είναι το $[1,4]$.

**γ)** $f'(x)>0$ για κάθε $x\in(1,4)$.

**δ)** υπάρχει $x_0\in(1,4)$ τέτοιο, ώστε $f'(x_0)=0$

μονάδες 8

**Α5.** Να μεταφέρετε στο τετράδιό σας το γράμμα που αντιστοιχεί στην σωστή απάντηση στη παρακάτω πρόταση:

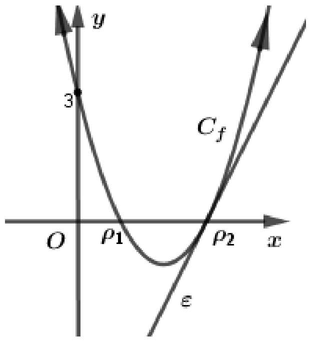
Το $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\frac{1}{x+h}-\frac{1}{x}}{h}$ ισούται με:

Α. $\frac{1}{x^2}$ Β. $-\frac{2}{x^2}$ Γ. $-\frac{1}{x^2}$ Δ. $-\frac{2}{x}$ Ε. 0

μονάδες 2

## Θέμα Β

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=x^2+\alpha x+\beta$, $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, $x\in\mathbb{R}$ και $g(x)=\sqrt{x}$, $x\geq 0$. Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της f και η ευθεία ε είναι εφαπτομένη της $C_f$ στο $x=\rho_2$.




**Β1.** Να αποδείξετε ότι $\beta=3$ και $\alpha<-2\sqrt{3}$.

μονάδες 4

Έστω ότι η ευθεία ε έχει εξίσωση $y=2x-6$.

**Β2.** Να αποδείξετε ότι $f(x)=x^2-4x+3$.

μονάδες 4

**Β3.** Κάνοντας κατάλληλο σχήμα να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $x(x-4)=g(x)-3$.

μονάδες 3

**Β4.** Έστω η συνάρτηση $h(x)=(g\circ f)(x)$.

**α)** Να αποδείξετε ότι $h(x)=\sqrt{x^2-4x+3}$, $x\in(-\infty,1]\cup[3,+\infty)$.

μονάδες 3

**β)** Να μελετήσετε την h ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

μονάδες 6

**γ)** Να αποδείξετε ότι για κάθε $x \in (-\infty,1) \cup (3,+\infty)$ ισχύουν οι σχέσεις

$h'(x)h(x) = x-2$ και $h''(x)h(x) + \left[h'(x)\right]^2 = 1$

μονάδες 5

## Θέμα Γ

Δίνεται συνάρτηση f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = x^{2022} + \kappa x + \lambda$ , $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$ της οποίας η διαίρεση με το $(x+1)^2$ είναι τέλεια και δίνει πηλίκο ένα πολυώνυμο $P(x)$ .

**Γ1.** Να αποδείξετε ότι $\kappa = 2022$ και $\lambda = 2021$.

Μονάδες 7

**Γ2.** Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα και να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 0$ .

Μονάδες 6

**Γ3.** Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $P(x)$ στο σημείο της με τετμημένη $x_0 = 1$.

Μονάδες 5

**Γ4.** Να αποδείξετε ότι $P(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ .

Μονάδες 7

## Θέμα Δ

Για τις παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$ συναρτήσεις $f_1, f_2$ ισχύουν:

- $f_1'(x) = -f_1(x)$
- $f_2'(x) = f_2(x)$
- $f_1(0) = \frac{1}{2}$, $f_2(0) = -\frac{1}{2}$

**Δ1.** Να αποδείξετε ότι $f(x) = (f_1 + f_2)(x) = \frac{e^{-x} - e^{x}}{2}$, $x \in \mathbb{R}$.

μονάδες 4

**Δ2.** Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f τέμνει την γραφική παράσταση της $g(x) = \ln x$ σε μοναδικό σημείο.

μονάδες 5

**Δ3.** Αν $\rho > 0$ η ρίζα της εξίσωσης $f(x) = g(x)$, να αποδείξετε ότι το $-\rho$ είναι ρίζα της εξίσωσης $f(x) = g\left(-\frac{1}{x}\right)$.

μονάδες 4

**Δ4.** Να αποδείξετε ότι η ευθεία $y = \alpha x + \beta$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ δεν μπορεί να είναι ασύμπτωτη της $C_f$ στο $-\infty$ ή το $+\infty$ .

μονάδες 6

**Δ5.** Να αποδείξετε ότι η $C_f$ είναι πάνω από τη διχοτόμο του 2ου και 4ου τεταρτημορίου στο $(-\infty, 0)$ και κάτω από αυτήν στο $(0, +\infty)$.

μονάδες 6

## Λύσεις

# Θέμα A

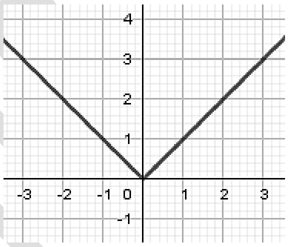
**A1.** Αν $y=\alpha^x=e^{x\ln\alpha}$ και θέσουμε $u=x\ln\alpha$, τότε έχουμε $y=e^u$. Επομένως,

$y'=(e^u)'=e^u\cdot u'=e^{x\ln\alpha}\cdot\ln\alpha=\alpha^x\ln\alpha$.

**A2.** Έστω οι συναρτήσεις $f,g,h$. Αν $h(x)\le f(x)\le g(x)$ κοντά στο $x_0$ και

$\lim\limits_{x\to x_0}h(x)=\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=\ell$, τότε και $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\ell$.

**A3. α)** Ψευδής.




**β)** Έστω η συνάρτηση $f(x)=|x|$.

Η $f$ είναι συνεχής στο $x_0=0$, αλλά δεν είναι παραγωγίσιμη σ' αυτό,

αφού $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x}{x}=1$, ενώ $\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{-x}{x}=-1$.

**A4.** α) Λ β) Λ γ) Λ δ) Σ **A5.** Γ

# Θέμα B

**B1.** Στο σχήμα παρατηρούμε ότι η $C_f$ τέμνει τον άξονα y΄y στο σημείο (0,3), οπότε $f(0)=3\Leftrightarrow\beta=3$ και $f(x)=x^2+\alpha x+3$.

Παρατηρούμε ακόμη ότι η $C_f$ τέμνει τον άξονα x΄x στα σημεία $(\rho_1,0),(\rho_2,0)$ με $\rho_1,\rho_2>0$.

Επομένως η εξίσωση $f(x)=0\Leftrightarrow x^2+\alpha x+3=0$ έχει ρίζες τους θετικούς αριθμούς $\rho_1,\rho_2$.

Η εξίσωση αυτή όμως είναι 2ου βαθμού, οπότε έχει $\Delta>0\Leftrightarrow\alpha^2-12>0\Leftrightarrow\alpha^2>12\Leftrightarrow|\alpha|>\sqrt{12}=2\sqrt3\Leftrightarrow$ $\alpha<-2\sqrt3$ ή $\alpha>2\sqrt3$.

Από τους τύπους του Vieta είναι $S=\rho_1+\rho_2>0\Leftrightarrow-\alpha>0\Leftrightarrow\alpha<0$, άρα $\alpha<-2\sqrt3$.

**B2. 1ος τρόπος**

Επειδή η ε εφάπτεται της $C_f$ στο $(\rho_2,0)$, ισχύει ότι $0=2\rho_2-6\Leftrightarrow2\rho_2=6\Leftrightarrow\rho_2=3$. Τότε $f(3)=0\Leftrightarrow9+3\alpha+3=0\Leftrightarrow3\alpha=-12\Leftrightarrow\alpha=-4<-2\sqrt3$, οπότε $f(x)=x^2-4x+3$.

**2ος τρόπος**

Επειδή η ε εφάπτεται της $C_f$ στο $(\rho_2,0)$, ισχύει ότι $f'(\rho_2)=\lambda_\varepsilon\Leftrightarrow2\rho_2+\alpha=2\Leftrightarrow\rho_2=\dfrac{2-\alpha}{2}$.

Είναι $f(\rho_2)=0\Leftrightarrow f\left(\dfrac{2-\alpha}{2}\right)=0\Leftrightarrow\left(\dfrac{2-\alpha}{2}\right)^2+\alpha\dfrac{2-\alpha}{2}+3=0\Leftrightarrow\ldots$

$\Leftrightarrow\alpha^2=16\Leftrightarrow\alpha=-4<2\sqrt3$ ή $\alpha=4$, απορρίπτεται

**3ος τρόπος**

Επειδή f είναι κυρτή γιατί $f''(x)=2>0$ και η ε εφάπτεται της $C_f$, η εξίσωση

$f(x)=2x-6\Leftrightarrow x^2+\alpha x+3-2x+6=0\Leftrightarrow x^2+(\alpha-2)x+9=0$ έχει διπλή ρίζα την $x=\rho_2$.

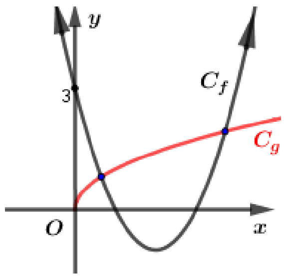
Όμως η εξίσωση είναι 2ου βαθμού και έχει διπλή ρίζα αν και μόνο αν

$\Delta=0\Leftrightarrow(\alpha-2)^2-36=0\Leftrightarrow(\alpha-2)^2=36\Leftrightarrow\alpha-2=\pm6\Leftrightarrow\alpha=-4$ ή $\alpha=8$.

Όμως $\alpha<-2\sqrt3$, άρα $\alpha=-4$.

**Β3.** $x(x-4)=g(x)-3 \Leftrightarrow x^2-4x+3=g(x) \Leftrightarrow f(x)=g(x)$.

Το πλήθος των λύσεων της εξίσωσης είναι το πλήθος των κοινών σημείων των γραφικών παραστάσεων των f, g.
Κάνοντας στο ίδιο σύστημα αξόνων τη γραφική τους παράσταση βλέπουμε ότι έχουν δύο κοινά σημεία, οπότε και η εξίσωση έχει 2 λύσεις.




**Β4. α)** Είναι

$A_h=\{x\in A_f \,/\, f(x)\in A_g\}=\{x\in\mathbb{R} \,/\, x^2-4x+3\geq 0\}=(-\infty,1]\cup[3,+\infty)$

και $h(x)=(g\circ f)(x)=g(f(x))=\sqrt{x^2-4x+3}$.

**β)** Η h είναι παραγωγίσιμη στο $(-\infty,1)\cup(3,+\infty)$ ως σύνθεση παραγωγίσιμων συναρτήσεων με

$$h'(x)=\left(\sqrt{x^2-4x+3}\right)'=\frac{(x^2-4x+3)'}{2\sqrt{x^2-4x+3}}=\frac{2x-4}{2\sqrt{x^2-4x+3}}=\frac{\cancel{2}(x-2)}{\cancel{2}\sqrt{x^2-4x+3}}\Leftrightarrow h'(x)=\frac{x-2}{\sqrt{x^2-4x+3}}.$$

Για κάθε $x\in(-\infty,1)$ είναι $h'(x)<0$ και επειδή η h είναι συνεχής στο $(-\infty,1]$, είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα αυτό. Για κάθε $x\in(3,+\infty)$ είναι $h'(x)>0$ και επειδή η h είναι συνεχής στο $[3,+\infty)$, είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα αυτό. Η h έχει τοπικά ελάχιστα τα $h(1)=0$ και $h(3)=0$.

**γ)** Για κάθε $x\in(-\infty,1)\cup(3,+\infty)$ είναι $h'(x)=\dfrac{x-2}{\sqrt{x^2-4x+3}}\Leftrightarrow h'(x)=\dfrac{x-2}{h(x)}\Leftrightarrow h'(x)h(x)=x-2$ και

$$\left(h'(x)h(x)\right)'=(x-2)'\Leftrightarrow h''(x)h(x)+\left[h'(x)\right]^2=1$$

## Θέμα Γ

**Γ1.** Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ : $f(x)=(x+1)^2\cdot P(x)\Leftrightarrow x^{2022}+\kappa x+\lambda=(x+1)^2\cdot P(x)$ (1)

Για x=-1 έχουμε: $(-1)^{2022}+\kappa(-1)+\lambda=0\Leftrightarrow 1-\kappa+\lambda=0\Leftrightarrow\lambda=\kappa-1$ (2)

Παραγωγίζουμε την (1): $2022x^{2021}+\kappa=2(x+1)\cdot P(x)+(x+1)^2\cdot P'(x)$ (3)

Για x=-1 έχουμε: $2022(-1)^{2021}+\kappa=0\Leftrightarrow -2022+\kappa=0\Leftrightarrow\kappa=2022$

Άρα από (2) : λ=2021.

**Γ2.** $f(x)=x^{2022}+2022x+2021$, $x\in\mathbb{R}$.

f συνεχής στο ως πολυωνυμική, $f'(x)=2022x^{2021}+2022$

$f'(x)=0\Leftrightarrow x=-1$ και $f'(x)>0\Leftrightarrow x>-1$, $f'(x)<0$ στο $(-\infty,-1)$.

Επειδή η f είναι συνεχής, είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty,-1]$ και γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,-1]$.

Η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο $x_0=-1$ το $f(-1)=0$ .

Για $x<-1\overset{f\searrow}{\Leftrightarrow}f(x)>f(-1)\Leftrightarrow f(x)>0$ και για $x>-1\overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow}f(x)>f(-1)\Leftrightarrow f(x)>0$.

Άρα η μοναδική ρίζα της f είναι η -1.

**Γ3.** Έχουμε: $f(x)=(x+1)^2\cdot P(x)\Leftrightarrow x^{2022}+2022x+2021=(x+1)^2\cdot P(x)$ (4)

Οπότε για x=1: $4044=4\cdot P(1)\Leftrightarrow P(1)=1011$.

Παραγωγίζουμε την (4): $2022x^{2021}+2022=2(x+1)\cdot P(x)+(x+1)^2\cdot P'(x)$ (5)

Οπότε για x=1: $2022+2022=4\cdot P(1)+4\cdot P'(1)\Leftrightarrow 4044=4\cdot 1011+4\cdot P'(1)\Leftrightarrow P'(1)=0$

Άρα η εξίσωση της εφαπτομένης είναι: ε: y=1011

**Γ4.** Η P είναι συνεχής ως πολυωνυμική και $P(1)=1011>0$. Οπότε αρκεί να αποδείξουμε ότι $P(x)\neq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Παραγωγίζουμε την (5):

$$\left(2022x^{2021}+2022\right)'=\left(2(x+1)\cdot P(x)+(x+1)^2\cdot P'(x)\right)'\Leftrightarrow$$

$$2022\cdot 2021x^{2020}=2P(x)+2(x+1)\cdot P'(x)+2(x+1)\cdot P'(x)+(x+1)^2\cdot P''(x)$$

Για x=-1 $2022\cdot 2021=2P(-1)\Leftrightarrow P(-1)=1011\cdot 2021\neq 0$

Έστω ότι υπάρχει $x_0\neq -1$ τέτοιο ώστε $P(x_0)=0$ τότε από την (1) και $f(x_0)=0$ που είναι άτοπο αφού η μοναδική ρίζα της f είναι το -1.

Άρα $P(x)\neq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

## Θέμα Δ

**Δ1.** Από γνωστή εφαρμογή ισχύει ότι $f_2'(x)=f_2(x)\Leftrightarrow f_2(x)=ce^x,\ c\in\mathbb{R}$.

Είναι $f_2(0)=-\frac{1}{2}\Leftrightarrow c=-\frac{1}{2}$, οπότε $f_2(x)=-\frac{1}{2}e^x$.

$$f_1'(x)=-f_1(x)\Leftrightarrow f_1'(x)+f_1(x)=0\Leftrightarrow f_1'(x)e^x+e^xf_1(x)=0\Leftrightarrow\left(f_1(x)e^x\right)'=0\Leftrightarrow$$

$f_1(x)e^x=c_1\Leftrightarrow f_1(x)=c_1e^{-x},\ c_1\in\mathbb{R}$. Είναι $f_1(0)=\frac{1}{2}\Leftrightarrow c_1=\frac{1}{2}$, οπότε $f_1(x)=-\frac{1}{2}e^x$, οπότε

$f_1(x)=\frac{1}{2}e^{-x}$. Άρα $f(x)=(f_1+f_2)(x)=\frac{e^{-x}-e^x}{2},\ x\in\mathbb{R}$.

**Δ2.** Αρκεί να δείξουμε ότι η εξίσωση $f(x)=g(x)$ έχει ακριβώς μία ρίζα.

Το σύνολο ορισμού της εξίσωσης είναι το $A_f\cap A_g=(0,+\infty)$.

Έστω η συνάρτηση $h(x)=f(x)-g(x)=\frac{e^{-x}-e^x}{2}-\ln x,\ x>0$.

Η h είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων με

$h'(x)=\frac{-e^{-x}-e^x}{2}-\frac{1}{x}<0$ για κάθε x > 0, άρα η h είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,+\infty)$.

Είναι $\lim\limits_{x\to 0^+}h(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\frac{e^{-x}-e^x}{2}-\ln x\right)=0-(-\infty)=+\infty$ και

$\lim\limits_{x\to+\infty}h(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{e^{-x}-e^x}{2}-\ln x\right)=0-\infty-\infty=-\infty$.

Επειδή η h είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $A=(0,+\infty)$, έχει σύνολο τιμών το

$h(A)=\left(\lim\limits_{x\to+\infty}h(x),\lim\limits_{x\to 0^+}h(x)\right)=\mathbb{R}$.

Επειδή το 0 περιέχεται στο σύνολο τιμών της h και η h είναι γνησίως φθίνουσα, η εξίσωση $h(x)=0\Leftrightarrow f(x)=g(x)$ έχει μοναδική ρίζα $\rho>0$.

**Δ3.** Επειδή το ρ > 0 είναι ρίζα της εξίσωσης $f(x)=g(x)$, είναι $f(\rho)=g(\rho)\Leftrightarrow f(\rho)-g(\rho)=0$ (1)

Το πεδίο ορισμού της εξίσωσης $f(x)=g\left(-\frac{1}{x}\right)\Leftrightarrow f(x)=\ln\left(-\frac{1}{x}\right)$ είναι το $(-\infty,0)$ γιατί

$x\in A_f=\mathbb{R}$ και $-\frac{1}{x}\in A_g=(0,+\infty)\Leftrightarrow-\frac{1}{x}>0\Leftrightarrow x<0$.

Είναι $f(-\rho)-g\left(-\frac{1}{-\rho}\right)=f(-\rho)-\ln\left(\frac{1}{\rho}\right)=\frac{e^{\rho}-e^{-\rho}}{2}-\ln\rho^{-1}=-\frac{e^{-\rho}-e^{\rho}}{2}+\ln\rho=-\left(f(\rho)-g(\rho)\right)=0$, άρα

$f(-\rho)-g\left(-\frac{1}{-\rho}\right)=0$, οπότε το $-\rho$ είναι ρίζα της εξίσωσης $f(x)=g\left(-\frac{1}{x}\right)$.

**Δ4.** Αν η ευθεία $y=\alpha x+\beta,\ \alpha,\beta\in\mathbb{R}$, είναι ασύμπτωτη της $C_f$ στο $+\infty$, τότε

$$\lim_{x\to\infty}\left(f(x)-(\alpha x+\beta)\right)=0\Leftrightarrow\lim_{x\to\infty}\left(\frac{e^{-x}-e^{x}}{2}-(\alpha x+\beta)\right)=0$$

- Αν α = 0, τότε $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{e^{-x}-e^{x}}{2}-\beta\right)=-\infty$, ενώ

- αν $\alpha\neq 0$, τότε $\lim_{x\to+\infty}\left(\left(\frac{e^{-x}}{2}-\beta\right)-\left(\frac{e^{x}}{2}+\alpha x\right)\right)\underset{(2)}{\overset{(1)}{=}}-\beta+\infty=+\infty$ γιατί

$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{e^{-x}}{2}-\beta\right)=-\beta$ (1) και $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{e^{x}}{2}+\alpha x\right)=\lim_{x\to+\infty}\left[e^{x}\left(\frac{1}{2}+\alpha\frac{x}{e^{x}}\right)\right]=+\infty$ (2), αφού $\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{e^{x}}\underset{DLH}{\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}}\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{e^{x}}=0$.

Άρα η $y=\alpha x+\beta,\ \alpha,\beta\in\mathbb{R}$ δεν είναι ασύμπτωτη της $C_f$ στο $+\infty$.

Όμοια στο $-\infty$.

ή

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{e^{-x}-e^{x}}{2}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{-x}-e^{x}}{2x}\underset{DLH}{\overset{\frac{-\infty}{+\infty}}{=}}\lim_{x\to+\infty}\frac{-e^{-x}+e^{x}}{2}=-\infty,$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{e^{-x}-e^{x}}{2}}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{e^{-x}-e^{x}}{2x}\underset{DLH}{\overset{\frac{+\infty}{-\infty}}{=}}\lim_{x\to+\infty}\frac{-e^{-x}+e^{x}}{2}=+\infty$$ άρα η f δεν έχει πλάγια ασύμπτωτη οποιαδήποτε ευθεία $y=\alpha x+\beta,\ \alpha,\beta\in\mathbb{R}$.

**Δ5.** Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x)=\frac{-e^{-x}-e^{x}}{2}$.

Η $f'$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f''(x)=\frac{e^{-x}-e^{x}}{2}$.

$$f''(x)\geq 0\Leftrightarrow\frac{e^{-x}-e^{x}}{2}\geq 0\Leftrightarrow e^{-x}-e^{x}\geq 0\Leftrightarrow e^{-x}\geq e^{x}\Leftrightarrow -x\geq x\Leftrightarrow 2x\leq 0\Leftrightarrow x\leq 0$$

Για κάθε $x\in(-\infty,0)$ είναι $f''(x)>0$ και επειδή η f είναι συνεχής στο x = 0, είναι κυρτή στο $(-\infty,0]$.

Για κάθε $x\in(0,+\infty)$ είναι $f''(x)<0$ και επειδή η f είναι συνεχής στο x = 0, είναι κοίλη στο $[0,+\infty)$.

Η εφαπτομένη της $C_f$ στο O(0,0) έχει εξίσωση: $y-f(0)=f'(0)(x-0)\Leftrightarrow y=-x$.

Επειδή η f είναι κυρτή στο $(-\infty,0]$, ισχύει ότι $f(x)\geq y\Leftrightarrow f(x)\geq -x$ για κάθε $x\in(-\infty,0]$ και το ίσον ισχύει μόνο για x = 0, οπότε $f(x)>-x$ για κάθε $x<0$, δηλαδή η $C_f$ είναι πάνω από τη διχοτόμο του $2^{ου}$ και $4^{ου}$ τεταρτημορίου στο $(-\infty,0)$.

Επειδή η f είναι κοίλη στο $[0,+\infty)$, ισχύει ότι $f(x)\leq y\Leftrightarrow f(x)\leq -x$ για κάθε $x\in[0,+\infty)$ και το ίσον ισχύει μόνο για x = 0, οπότε $f(x)<-x$ για κάθε $x>0$, δηλαδή η $C_f$ είναι κάτω από την $y=-x$ στο $(0,+\infty)$.

# 10ο Διαγώνισμα

## Θέμα Α

**Α1.** Έστω μια συνάρτηση f, η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ. Να αποδείξετε ότι αν $f'(x)>0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, τότε η f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το Δ.

μονάδες 7

**Α2.** Να διατυπώσετε το θεώρημα Rolle και να το ερμηνεύσετε γεωμετρικά.

μονάδες 4

**Α3.** Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:

« Αν δύο συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες σ' ένα διάστημα Δ, τότε: $f(x)=g(x) \Leftrightarrow f'(x)=g'(x)$ ».

**α)** Είναι αληθής, ή ψευδής η πρόταση;

**β)** Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α.

μονάδες 1+3

**Α4.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη Σωστό, αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

**α)** Αν $f'(x)=(x-1)^2(x-2)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, τότε:

**i.** το $f(1)$ είναι τοπικό μέγιστο της f

**ii.** το $f(2)$ είναι τοπικό ελάχιστο της f

**β)** Η γραφική παράσταση μιας πολυωνυμικής συνάρτησης άρτιου βαθμού έχει πάντοτε οριζόντια εφαπτομένη.

**γ)** Η γραφική παράσταση μιας πολυωνυμικής συνάρτησης περιττού βαθμού έχει πάντοτε οριζόντια εφαπτομένη.

**δ)** Αν η f έχει δεύτερη παράγωγο στο $x_0$ ,τότε η f΄ είναι συνεχής στο $x_0$.

μονάδες 4+2+2+2

## Θέμα Β

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{2x^2-2}{|x|+x}$.

**Β1.** Να αποδείξετε ότι $f(x)=x-\dfrac{1}{x},\ x>0$.

μονάδες 4

**Β2.** Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$.

μονάδες 3

**Β3.** Έστω $\varphi(x)=(f\circ g)(x)=e^x-e^{-x},\ x\in\mathbb{R}$.

**α)** Να αποδείξετε ότι $g(x)=e^x,\ x\in\mathbb{R}$.

μονάδες 3

**β)** Να αποδείξετε ότι η φ είναι αντιστρέψιμη και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

μονάδες 5

**γ)** Να βρείτε την $\varphi^{-1}$.

μονάδες 5

**δ)** Να αποδείξετε ότι $e^x-e^{-x}>x-\dfrac{1}{x}$ για κάθε $x>0$.

μονάδες 5

## Θέμα Γ

Ευθεία (ε) στρέφεται γύρω από το σημείο της Α(8,4) με ρυθμό $\lambda'(t)=\dfrac{9}{160}\min^{-1}$ όπου $\lambda\in(0,+\infty)$ είναι ο συντελεστής διεύθυνσής της (ε) . Εάν η ευθεία (ε) τέμνει τους άξονες x΄x , y΄y, στα σημεία Κ , Λ αντίστοιχα, τότε:

**Γ1.** Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του τριγώνου ΟΚΛ είναι $E(\lambda)=8\left(\frac{1}{\lambda}-4+4\lambda\right)$.

μονάδες 6

**Γ2.** Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του εμβαδού του τριγώνου ΟΚΛ ως προς το χρόνο τη χρονική στιγμή που η ευθεία περνάει από το σημείο Β(4,1).

μονάδες 6

**Γ3.** Να αποδείξετε ότι η $E'(x)=8\left(-\frac{1}{x^2}+4\right)$ είναι αντιστρέψιμη και να βρεθεί η $g(x)=(E')^{-1}(x)$.

μονάδες 7

**Γ4.** Να βρείτε τη μονοτονία της $g$ και της συνάρτησης $f(x)=e^{-1821x}-x^{1821}+2021$ και να αποδείξετε ότι αυτές έχουν μοναδικό κοινό σημείο.

μονάδες 6

## Θέμα Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\eta\mu x-2e^x+x^2+x+2$

**Δ1.** Να αποδείξετε ότι η $f$ είναι γνησίως φθίνουσα .

μονάδες 7

**Δ2.** Να βρείτε το πλήθος ριζών της εξίσωσης $e^{-x}\cdot\left(\eta\mu x+x^2+x+2\right)=2$.

μονάδες 7

**Δ3.** Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης

$$g(x)=\sqrt{\eta\mu x-2e^x+x^2+x+1-\ln\left(\eta\mu x-2e^x+x^2+x+2\right)}.$$

μονάδες 4

**Δ4.** Αν η f είναι κυρτή στο $(-\infty,0]$ και κοίλη $[0,+\infty)$, να αποδείξετε ότι υπάρχουν δύο ακριβώς εφαπτομένες παράλληλες στην ευθεία $(\delta): y=\left(\pi-e^{\pi}\right)\cdot x-2021$

μονάδες 7

# Λύσεις

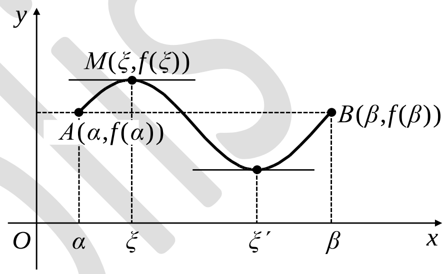
## Θέμα Α

**Α1.** Έστω $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$. Θα δείξουμε ότι $f(x_1) < f(x_2)$. Πράγματι, στο διάστημα $[x_1, x_2]$ η $f$ ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ. Επομένως, υπάρχει $\xi \in (x_1, x_2)$ τέτοιο, ώστε

$f'(\xi) = \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$, οπότε έχουμε $f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1)$.

Επειδή $f'(\xi) > 0$ και $x_2 - x_1 > 0$, έχουμε $f(x_2) - f(x_1) > 0$, οπότε $f(x_1) < f(x_2)$.
Ομοίως αν $x_1 > x_2$

**Α2.** Αν μια συνάρτηση $f$ είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$, παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα $(\alpha, \beta)$ και $f(\alpha) = f(\beta)$ τότε υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε: $f'(\xi) = 0$.
**Γεωμετρικά**, αυτό σημαίνει ότι υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη της $C_f$ στο $M(\xi, f(\xi))$ να είναι παράλληλη στον άξονα των x.




**Α3. α)** Ψευδής

**β)** Είναι φανερό ότι αν $f(x) = g(x)$ για κάθε $x \in \Delta$, τότε προφανώς και $f'(x) = g'(x)$ για κάθε $x \in \Delta$.
Αν όμως $f'(x) = g'(x)$ για κάθε $x \in \Delta$ τότε $f(x) = g(x) + c,\ c \in \mathbb{R}, x \in \Delta$.
Αντιπαράδειγμα για $x \in \mathbb{R}$ έχουμε: $f(x) = x^3$ και $g(x) = x^3 + 4$ με $f'(x) = g'(x) = 3x^2$

**Α4.** α) i. Λ  ii. Σ  β) Σ  γ) Λ  δ) Σ

## Θέμα Β

**Β1.** Η f ορίζεται όταν $|x| + x \neq 0 \Leftrightarrow |x| \neq -x \Leftrightarrow x > 0$. Τότε

$$f(x) = \frac{2x^2 - 2}{|x| + x} = \frac{2x^2 - 2}{x + x} = \frac{2x^2 - 2}{2x} = \frac{\cancel{2}x^{\cancel{2}}}{\cancel{2}\cancel{x}} - \frac{\cancel{2}}{\cancel{2}x} = x - \frac{1}{x}.$$

**Β2.** Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με $f'(x) = 1 + \dfrac{1}{x^2} > 0 \Rightarrow f \nearrow (0, +\infty)$

**Β3. α)** Είναι $f(g(x)) = e^x - e^{-x} \Leftrightarrow f(g(x)) = e^x - \dfrac{1}{e^x} \Leftrightarrow f(g(x)) = f(e^x) \overset{\nearrow}{\Leftrightarrow} g(x) = e^x,\ x \in \mathbb{R}$

**β)** Η φ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $\varphi'(x) = e^x + e^{-x} > 0 \Rightarrow \varphi \nearrow \mathbb{R} \Rightarrow \varphi\ 1-1$, οπότε η φ είναι αντιστρέψιμη.
Είναι $\lim\limits_{x \to -\infty} \varphi(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} (e^x - e^{-x}) = 0 - (+\infty) = -\infty$ και $\lim\limits_{x \to +\infty} \varphi(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} (e^x - e^{-x}) = +\infty - 0 = +\infty$.
Επειδή η φ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ έχει σύνολο τιμών το $\varphi(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.

**γ)** Επειδή το πεδίο ορισμού της $\varphi^{-1}$ είναι το σύνολο τιμών της φ, είναι $A_{\varphi^{-1}} = \mathbb{R}$.

$\varphi(x) = y \Leftrightarrow e^x - e^{-x} = y \Leftrightarrow e^x - \dfrac{1}{e^x} = y \Leftrightarrow (e^x)^2 - 1 = ye^x \Leftrightarrow (e^x)^2 - ye^x - 1 = 0$ (1).

Θέτουμε $e^x = \omega > 0$ και η (1) γίνεται $\omega^2 - y\omega - 1 = 0$. Η εξίσωση αυτή είναι $2^{ου}$ βαθμού ως προς ω με $\Delta = y^2 + 4 > 0$ και ρίζες $\omega_{1,2} = \dfrac{y \pm \sqrt{y^2+4}}{2}$.

Είναι $\omega > 0 \Leftrightarrow \dfrac{y+\sqrt{y^2+4}}{2} > 0 \Leftrightarrow y + \sqrt{y^2+4} > 0 \Leftrightarrow \sqrt{y^2+4} > -y$ (2)

Αν $y \geq 0$ τότε η (2) είναι αληθής.

Αν $y < 0$ τότε η (2) γίνεται $\left(\sqrt{y^2+4}\right)^2 > (-y)^2 \Leftrightarrow y^2 + 4 > y^2$ ισχύει.

Είναι $\omega > 0 \Leftrightarrow \dfrac{y-\sqrt{y^2+4}}{2} > 0 \Leftrightarrow y - \sqrt{y^2+4} > 0 \Leftrightarrow \sqrt{y^2+4} < y$ (3)

Αν $y \leq 0$ τότε η (2) είναι αδύνατη.

Αν $y > 0$ τότε η (3) γίνεται $\left(\sqrt{y^2+4}\right)^2 < y^2 \Leftrightarrow y^2 + 4 < y^2$ αδύνατη.

Άρα $\omega = \dfrac{y+\sqrt{y^2+4}}{2} \Leftrightarrow e^x = \dfrac{y+\sqrt{y^2+4}}{2} \Leftrightarrow x = \ln\dfrac{y+\sqrt{y^2+4}}{2}$.

Οπότε $\varphi^{-1}(y) = \ln\dfrac{y+\sqrt{y^2+4}}{2}$, $y \in \mathbb{R}$, άρα $\varphi^{-1}(x) = \ln\dfrac{x+\sqrt{x^2+4}}{2}$, $x \in \mathbb{R}$.

ή

Επειδή το πεδίο ορισμού της $\varphi^{-1}$ είναι το σύνολο τιμών της φ, είναι $A_{\varphi^{-1}} = \mathbb{R}$.

$\varphi(x) = y \Leftrightarrow e^x - e^{-x} = y \Leftrightarrow e^x - \dfrac{1}{e^x} = y \Leftrightarrow \left(e^x\right)^2 - 1 = ye^x \Leftrightarrow \left(e^x\right)^2 - ye^x - 1 = 0$ (1).

Θέτουμε $e^x = \omega > 0$ και η (1) γίνεται $\omega^2 - y\omega - 1 = 0$. Η εξίσωση αυτή είναι $2^{ου}$ βαθμού ως προς ω με $\Delta = y^2 + 4 > 0$ και ρίζες $\omega_{1,2} = \dfrac{y \pm \sqrt{y^2+4}}{2}$.

Έχουμε :

$\dfrac{y+\sqrt{y^2+4}}{2} > \dfrac{y+\sqrt{y^2}}{2} \Leftrightarrow \dfrac{y+\sqrt{y^2+4}}{2} > \dfrac{y+|y|}{2}$ οπότε $\dfrac{y+\sqrt{y^2+4}}{2} > 0$ .

$\dfrac{\sqrt{y^2+4}-y}{2} > \dfrac{\sqrt{y^2}-y}{2} \Leftrightarrow \dfrac{\sqrt{y^2+4}-y}{2} > \dfrac{|y|-y}{2}$.

Όμως $|y| \geq y \Leftrightarrow |y| - y \geq 0 \Leftrightarrow \dfrac{|y|-y}{2} \geq 0$, $|y| \geq -y \Leftrightarrow |y| + y \geq 0 \Leftrightarrow \dfrac{|y|+y}{2} \geq 0$ οπότε :

$\dfrac{y+\sqrt{y^2+4}}{2} > 0$, $\dfrac{\sqrt{y^2+4}-y}{2} > 0 \Leftrightarrow \dfrac{y-\sqrt{y^2+4}-y}{2} < 0$ .

Άρα η δεκτή λύση είναι η $\omega = \dfrac{y+\sqrt{y^2+4}}{2}$.

**δ)** $e^x - e^{-x} > x - \dfrac{1}{x} \Leftrightarrow f\left(g(x)\right) > f(x) \overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow} g(x) > x \Leftrightarrow e^x > x$ που ισχύει γιατί για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $e^x \geq x + 1 > x$.

## Θέμα Γ

**Γ1.** Είναι ε: $y - 4 = \lambda(x-8) \Leftrightarrow y = \lambda x + 4 - 8\lambda$. Τέμνει τον x΄x στο σημείο $K\left(\dfrac{8\lambda-4}{\lambda}, 0\right)$ και τον y΄y στο σημείο $\Lambda(0, -8\lambda+4)$ οπότε το εμβαδόν του τριγώνου είναι

$$E=\frac{1}{2}\left|\frac{8\lambda-4}{\lambda}\right||4-8\lambda|=\frac{1}{2}\frac{(4-8\lambda)^2}{\lambda}=8\frac{(1-2\lambda)^2}{\lambda}=8\left(\frac{1}{\lambda}-4+4\lambda\right)$$

**Γ2.** Άρα $E(\lambda)=8\left(\frac{1}{\lambda}-4+4\lambda\right)$.

Είναι $E(t)=8\left(\frac{1}{\lambda(t)}-4+4\lambda(t)\right)$, $t\geq 0$ , όπου t ο χρόνος σε λεπτά(min).

Είναι $E'(t)=8\left(-\frac{1}{\lambda^2(t)}+4\right)\lambda'(t)$ οπότε $E'(t)=8\left(-\frac{1}{\lambda^2(t)}+4\right)\cdot\frac{9}{160}$

Όταν $t=t_0$ είναι $\lambda(t_0)=\frac{1-4}{4-8}=\frac{3}{4}$ και άρα $E'(t_0)=8\left(-\frac{16}{9}+4\right)\cdot\frac{9}{160}\Leftrightarrow$

$E'(t_0)=8\frac{20}{9}\cdot\frac{9}{160}=1$ μ.μ$^2$ / min

**Γ3.** $E'(x)=8\left(-\frac{1}{x^2}+4\right)$ με x> 0.Είναι $E''(x)=\frac{16}{x^3}>0$ οπότε η Ε΄ είναι γνησίως αύξουσα και άρα αντιστρέφεται. Επειδή η Ε΄ είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$ θα είναι
Ε΄(Α)=$(\lim_{x\to 0^+}E'(x),\lim_{x\to+\infty}E'(x))=(-\infty,32)$ .

Θέτω y=Ε΄(x) με x > 0 και ψ < 32, οπότε $y=8\left(-\frac{1}{x^2}+4\right)\Leftrightarrow\frac{y}{8}-4=-\frac{1}{x^2}\Leftrightarrow\frac{32-y}{8}=\frac{1}{x^2}\Leftrightarrow x^2=\frac{8}{32-y}$

$\overset{x>0}{\Leftrightarrow}x=\sqrt{\frac{8}{32-y}}$ και άρα $(E')^{-1}(x)=\sqrt{\frac{8}{32-x}}$ με x < 32.

**Γ4.** Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x)=g(x)-f(x)=\sqrt{\frac{8}{32-x}}-e^{-1821x}+x^{1821}-2021$ με x <32.

Η h είναι παραγωγίσιμη με παράγωγο $h'(x)=\frac{1}{2\sqrt{\frac{8}{32-x}}}\left(\frac{8}{32-x}\right)'-1821e^{-1821x}+1821x^{1820}\Leftrightarrow$

$h'(x)=\frac{1}{2\sqrt{\frac{8}{32-x}}}\frac{8}{(32-x)^2}+1821e^{-1821x}+1821x^{1820}>0$ οπότε η hείναι γνησίως αύξουσα.

Είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της οπότε έχει σύνολο τιμών το
h(A)=$\left(\lim_{x\to-\infty}h(x),\lim_{x\to 32^-}h(x)\right)=(-\infty,+\infty)=\mathbb{R}$ .

Επειδή το 0 περιέχεται στο σύνολο τιμών της h και η h είναι γνησίως αύξουσα, η εξίσωση $h(x)=0\Leftrightarrow g(x)=f(x)$ έχει μόνο μία ρίζα.

## Θέμα Δ

**Δ1.** Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ , με παράγωγο $f'(x)=\sigma\upsilon\nu x-2e^x+2x+1$,

Γνωρίζουμε ότι για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει ότι $e^x\geq x+1\Leftrightarrow 2e^x\geq 2x+2\Leftrightarrow -1\geq 2x+1-2e^x$ με το ίσον να ισχύει μόνο για x = 0. Επειδή για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει $-1\leq\sigma\upsilon\nu x\leq 1$ με πρόσθεση κατά μέλη προκύπτει $\sigma\upsilon\nu x-2e^x+2x+1\leq 0\Leftrightarrow f'(x)\leq 0$ με το ίσον να ισχύει μόνο για x= 0 οπότε η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.

**Δ2.** Έχουμε $e^{-x}\left(\eta\mu x+x^2+x+2\right)=2\Leftrightarrow\eta\mu x+x^2+x+2=2e^x\Leftrightarrow$

$\eta\mu x-2e^x+x^2+x+2=0 \Leftrightarrow f(x)=0$.

**α΄ τρόπος**

Παρατηρούμε ότι $f(0)=0$ και η f είναι γνησίως φθίνουσα, άρα η x = 0 είναι η μοναδική της ρίζα.

**β΄ τρόπος**

Η f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο πεδίο ορισμού της οπότε έχει σύνολο τιμών το $f(\mathbb{R})=\left(\lim\limits_{x\to+\infty} f(x), \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)\right)=(-\infty,+\infty)$ αφού

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\eta\mu x-2e^x+x^2+x+2\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[x^2\cdot\left(\frac{\eta\mu x}{x^2}+1+\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}\right)-2e^x\right]=$

$+\infty\cdot\left[(0+1+0+0)-0\right]=+\infty$ και

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\eta\mu x-2e^x+x^2+x+2\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[x^2\cdot\left(\frac{\eta\mu x}{x^2}-\frac{2e^x}{x^2}+1+\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}\right)\right]=-\infty$.

($\left|\frac{\eta\mu x}{x^2}\right|\le\frac{1}{x^2}\Leftrightarrow-\frac{1}{x^2}\le\frac{\eta\mu x}{x^2}\le\frac{1}{x^2}$.

$\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{1}{x^2}=0=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(-\frac{1}{x^2}\right)$ οπότε από Κριτήριο παρεμβολής $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{\eta\mu x}{x^2}=0$).

Επίσης $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^2}\overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{\underset{DLH}{=}}\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{2x}\overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{\underset{DLH}{=}}\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{2}=+\infty$ ).

Το $0\in f(\mathbb{R})=\mathbb{R}$ οπότε υπάρχει $x_0\in\mathbb{R}$ τέτοιος ώστε $f(x_0)=0$.

Το $x_0$ μοναδικό αφού η f είναι γνησίως φθίνουσα άρα η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μοναδική ρίζα.

**Δ3.** Πρέπει και αρκεί: $\eta\mu x-2e^x+x^2+x+2>0\,(1)$ και

$\eta\mu x-2e^x+x^2+x+1-\ln\left(\eta\mu x-2e^x+x^2+x+2\right)\ge0\,(2)$

$(1)\Leftrightarrow f(x)>0\Leftrightarrow f(x)>f(0)\Leftrightarrow x<0\,(3)$ και για την (2) αν θέσουμε

$\eta\mu x-2e^x+x^2+x+2=y>0$ για $x<0$ τότε $-2e^x+x^2+x+2=y-1$, $(2)\Leftrightarrow$

$y-1\ge\ln y$, αληθής για κάθε $y>0$, κάτα συνέπεια αληθής για κάθε $x<0\,(4)$

Από $(3),(4)\Rightarrow A_g=(-\infty,0)$.

**Δ4.** Έστω (ε) εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f που είναι παράλληλη στην ευθεία (δ).

Αν $A(x_0,f(x_0))$ το σημείο επαφής της με την $C_f$ τότε $f'(x_0)=\pi-e^\pi$ .

Έστω $A_1=(-\infty,0)$ και $A_2=[0,+\infty)$.

Η $f'$ είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty,0]$, γνησίως φθίνουσα στο $[0,+\infty)$ οπότε :

$f'(A_1)=\left(\lim\limits_{x\to-\infty}f'(x),\lim\limits_{x\to0^-}f'(x)\right)=(-\infty,0)$, $f'(A_2)=\left(\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x),f'(0)\right]=(-\infty,0]$.

Γνωρίζουμε ότι για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει ότι $e^x\ge x+1>x$, οπότε $e^\pi>\pi\Leftrightarrow\pi-e^\pi<0$.

Το $\pi-e^\pi<0$ ανήκει στα $f(A_1), f(A_2)$ οπότε υπάρχουν $x_1\in A_1, x_2\in A_2$ τέτοια ώστε

$f'(x_1)=\pi-e^\pi$, $f'(x_2)=\pi-e^\pi$

Τα $x_1,x_2$ μοναδικά ,λόγω της μονοτονίας στα διαστήματα $A_1,A_2$ ,άρα η εξίσωση $f'(x)=\pi-e^\pi$ έχει δύο ακριβώς ρίζες.

Άρα υπάρχουν δύο ακριβώς εφαπτομένες παράλληλες στην ευθεία $(\delta): y=\left(\pi-e^\pi\right)\cdot x-2021$ .

( $\lim\limits_{x\to-\infty}f'(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sigma\upsilon\nu x-2e^x+2x+1\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[x\cdot\left(\frac{\sigma\upsilon\nu x}{x}+2+\frac{1}{x}\right)-2e^x\right]=-\infty\cdot\left[(0+2+0)-0\right]=-\infty$

και

$\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sigma\upsilon\nu x - 2e^x + 2x + 1\right) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left[x\cdot\left(\frac{\sigma\upsilon\nu x}{x} - 2\frac{e^x}{x} + 2 + \frac{1}{x}\right)\right] = +\infty\cdot(0-\infty+2+0) = -\infty$ .

$\left|\frac{\sigma\upsilon\nu x}{x}\right| \le \frac{1}{|x|} \Leftrightarrow -\frac{1}{|x|} \le \frac{\sigma\upsilon\nu x}{x} \le \frac{1}{|x|}$.

$\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{1}{|x|} = 0 = \lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(-\frac{1}{|x|}\right)$ οπότε από Κριτήριο παρεμβολής $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{\sigma\upsilon\nu x}{x} = 0$.

Επίσης $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x} \underset{DLH}{\overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{=}} \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{1} = +\infty$ ).

# 11ο Διαγώνισμα

## Θέμα Α

**Α1. α)** Έστω η συνάρτηση $f(x)=x^{-\nu}$, $\nu\in\mathbb{N}^*$. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}^*$ και ισχύει $f'(x)=-\nu x^{-\nu-1}$, δηλαδή $\left(x^{-\nu}\right)'=-\nu x^{-\nu-1}$.

**β)** Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x)=x^{\alpha}$, $\alpha\in\mathbb{R}-\mathbb{Z}$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ και ισχύει $f'(x)=\alpha x^{\alpha-1}$, δηλαδή $\left(x^{\alpha}\right)'=\alpha x^{\alpha-1}$.

μονάδες 3+4

**Α2.** Ποιες είναι οι πιθανές θέσεις τοπικών ακροτάτων μιας συνάρτησης f σ' ένα διάστημα Δ και ποια σημεία ονομάζονται κρίσιμα της f στο Δ;

μονάδες 4

**Α3.** Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:
« Αν μια f είναι γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα Δ και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ, τότε $f'(x)>0$ για κάθε x στο εσωτερικό του Δ ».

**α)** Είναι αληθής, ή ψευδής η πρόταση;
**β)** Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α.

μονάδες 1+3

**Α4.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη Σωστό, αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

**α)** $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x\eta\mu\frac{1}{x}\right)=1$

**β)** Για κάθε συνεχή συνάρτηση $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$, η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $(\alpha,\beta)$, αν $f(\alpha)=f(\beta)$, τότε υπάρχει ακριβώς ένα $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi)=0$.

**γ)** Αν μια συνάρτηση f είναι 1-1 στο πεδίο ορισμού της, τότε υπάρχουν σημεία της γραφικής παράστασης της f με την ίδια τεταγμένη.

μονάδες 6

**Α5.** Να μεταφέρετε στο τετράδιό σας το γράμμα που αντιστοιχεί στην σωστή απάντηση στις παρακάτω προτάσεις:

**α)** Το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\left|x^3-x^2-1\right|-x^3+x^2}{x^2}$ είναι ίσο με:

Α. $+\infty$ Β. $-\infty$ Γ. 1 Δ. $-1$ Ε. 0

**β)** Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=\dfrac{1}{(x-2)^2}+1$ και $g(x)=\dfrac{1}{x^2-1}$.

Από τους παρακάτω ισχυρισμούς λάθος είναι ο:

Α) η g είναι συνεχής στο 2
Β) η f είναι συνεχής στο 1
Γ) η g έχει δυο σημεία στα οποία δεν είναι συνεχής
Δ) $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=1$

μονάδες 4

## Θέμα Β

Δίνεται συνάρτηση f συνεχής στο $\mathbb{R}$ με $f(x)\neq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)-\eta\mu x-1}{x}=\lambda\in[0,+\infty)$.

**Β1.** Να αποδείξετε ότι $f(0)=1$.

μονάδες 4

**Β2.** Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x)=\ln f(x)$ έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.

μονάδες 6

**Β3.** Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$.

μονάδες 5

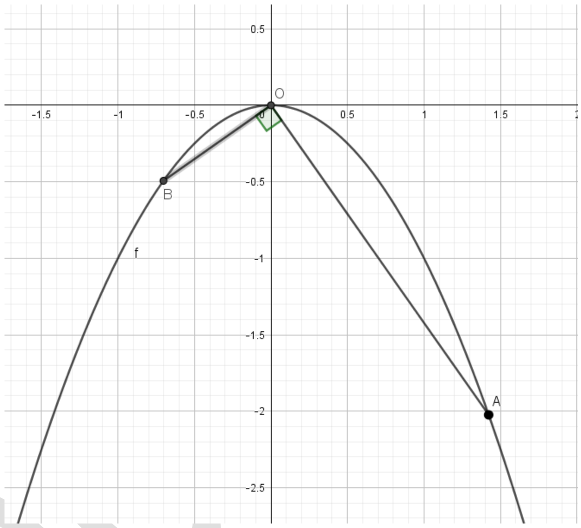
**Β4.** Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της $C_f$ στο σημείο Α(0,1) σχηματίζει με τον άξονα x΄x οξεία γωνία τουλάχιστον 45°. μονάδες 5

**Β5.** Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=\frac{συνx}{x}$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.

μονάδες 5

## Θέμα Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=-x^2$ , $x\in\mathbb{R}$ και το σημείο της $A\left(\alpha,-\alpha^2\right)$, $\alpha>0$. Θεωρούμε και ένα σημείο Β της γραφικής παράστασης της f με αρνητική τετμημένη τέτοιο ώστε $OA\perp OB$ .




**Γ1.** Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του τριγώνου ΟΑΒ συναρτήσει του α δίνεται από την συνάρτηση

$$E(\alpha)=\frac{\alpha^2+1}{2\alpha}, \ \alpha>0 \ .$$

μονάδες 6

**Γ2.** Να βρείτε για ποια τιμή του α το εμβαδόν του ΟΑΒ παίρνει την ελάχιστη τιμή του και ποια είναι αυτή .

μονάδες 5

**Γ3.** Αν ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης του σημείου Α είναι $4t\frac{cm}{sec}$ , όπου $t\geq 0$ και το σημείο Α τη χρονική στιγμή 0 έχει τετμημένη $\frac{1}{2}$, τότε:

**α)** να βρείτε πότε το σημείο Α βρίσκεται στη θέση που το εμβαδόν του ΟΑΒ παίρνει την ελάχιστη τιμή του.

μονάδες 5

**β)** να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής του εμβαδού του τριγώνου ΟΑΒ την παραπάνω χρονική στιγμή.

μονάδες 3

**Γ4.** Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{\alpha\to 1}\left(e^{\frac{1}{1-E(\alpha)}}\cdot ημ\left(\frac{1}{E(\alpha)-1}\right)\right)$ , όπου Ε(α) η συνάρτηση του ερωτήματος Γ1.

μονάδες 6

## Θέμα Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^4(1-x)^4$, $x\in\mathbb{R}$.

**Δ1.** Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα.

μονάδες 4

**Δ2.** Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $f\left(e^x-x-1\right)=0$, $x\in\mathbb{R}$.

μονάδες 6

**Δ3.** Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f έχει άξονα συμμετρίας την ευθεία $x=\frac{1}{2}$, δηλαδή $f\left(x+\frac{1}{2}\right)=f\left(\frac{1}{2}-x\right)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Στη συνέχεια να αποδείξετε ότι υπάρχουν τουλάχιστον δύο εφαπτομένες της $C_f$ παράλληλες στην χορδή ΟΑ, όπου Ο(0,0) και $A\left(\frac{1}{2},f\left(\frac{1}{2}\right)\right)$.

μονάδες 2+6

**Δ4.** Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=x^4+(1-x)^4$ δεν μπορεί να έχει πραγματικές ρίζες αν τα $x^4$ και $(1-x)^4$ είναι φυσικοί αριθμοί.

μονάδες 7

## Λύσεις

### Θέμα Α

**Α1. α)** Για κάθε $x \neq 0$ έχουμε: $\left(x^{-\nu}\right)' = \left(\dfrac{1}{x^{\nu}}\right)' = \dfrac{(1)'x^{\nu} - 1(x^{\nu})'}{(x^{\nu})^2} = \dfrac{-\nu x^{\nu-1}}{x^{2\nu}} = -\nu x^{-\nu-1}$.

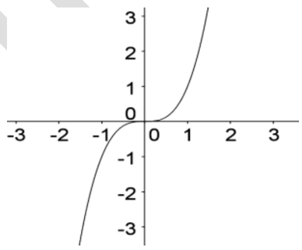
**β)** Είναι $y = x^{\alpha} = e^{\alpha \ln x}$ και θέσουμε $u = \alpha \ln x$, τότε έχουμε $y = e^{u}$. Επομένως,

$y' = \left(e^{u}\right)' = e^{u} \cdot u' = e^{\alpha \ln x} \cdot \alpha \cdot \dfrac{1}{x} = x^{\alpha} \cdot \dfrac{\alpha}{x} = \alpha x^{\alpha - 1}$.

**Α2.** Οι πιθανές θέσεις των τοπικών ακροτάτων μιας συνάρτησης $f$ σ' ένα διάστημα Δ είναι:
1. Τα εσωτερικά σημεία του Δ στα οποία η παράγωγος της $f$ μηδενίζεται.
2. Τα εσωτερικά σημεία του Δ στα οποία η $f$ δεν παραγωγίζεται.
3. Τα άκρα του Δ (αν ανήκουν στο πεδίο ορισμού της).

Τα εσωτερικά σημεία του Δ στα οποία η $f$ δεν παραγωγίζεται και είναι συνεχής ή η παράγωγός της είναι ίση με το μηδέν, λέγονται κρίσιμα σημεία της $f$ στο διάστημα Δ.

**Α3. α)** Ψευδής




**β)** Έστω η συνάρτηση $f(x) = x^3$.

Είναι $f'(x) = 3x^2$, και $f'(0) = 0$, Δηλαδή, βλέποντας το σχήμα, η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, χωρίς να είναι $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

**Α4.** α) Σ β) Λ γ) Λ **Α5.** α) Ε β) Γ

### Θέμα Β

**Β1.** Έστω $\dfrac{f(x) - \eta\mu x - 1}{x} = \varphi(x),\ x \neq 0$ με $\lim\limits_{x \to 0} \varphi(x) = \lambda$.

Είναι $f(x) - \eta\mu x - 1 = x\varphi(x) \Leftrightarrow f(x) = x\varphi(x) + \eta\mu x + 1$.

Επειδή η f είναι συνεχής στο $x = 0$, ισχύει ότι $f(0) = \lim\limits_{x \to 0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0}\left(x\varphi(x) + \eta\mu x + 1\right) = 1$

**Β2.** Επειδή $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και η f είναι συνεχής, διατηρεί σταθερό πρόσημο.

Επειδή $f(0) = 1 > 0$ είναι $f(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, οπότε η g έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.

**Β3.** $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x) - f(0)}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x\varphi(x) + \eta\mu x + \cancel{1} - \cancel{1}}{x} = \lim\limits_{x \to 0}\left(\varphi(x) + \dfrac{\eta\mu x}{x}\right) = \lambda + 1 \in \mathbb{R}$, άρα η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$ με $f'(0) = \lambda + 1$.

**Β4.** Γνωρίζουμε ότι αν ω είναι η γωνία που σχηματίζει η εφαπτομένη της $C_f$ στο σημείο $\left(x_1, f(x_1)\right)$, τότε $f'(x_1) = \varepsilon\varphi\omega$. Άρα στο σημείο Α είναι $f'(0) = \varepsilon\varphi\omega \Leftrightarrow \varepsilon\varphi\omega = \lambda + 1 \geq 1$ γιατί $\lambda \geq 0$, οπότε $\varepsilon\varphi\omega \geq \varepsilon\varphi 45^{\circ} \Leftrightarrow \omega \geq 45^{\circ}$.

**Β5.** $f(x) = \dfrac{\sigma\upsilon\nu x}{x} \Leftrightarrow x f(x) - \sigma\upsilon\nu x = 0$.

Έστω $h(x) = x f(x) - \sigma\upsilon\nu x,\ x \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$. Είναι $h(0) = 0 - \sigma\upsilon\nu 0 = -1 < 0$, $h\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = \dfrac{\pi}{2} f\left(\dfrac{\pi}{2}\right) > 0$, δηλαδή

$h(0)h\left(\frac{\pi}{2}\right)<0$ και επειδή η h είναι συνεχής, σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano, η εξίσωση

$h(x)=0 \Leftrightarrow xf(x)-\sigma\upsilon\nu x=0 \Leftrightarrow f(x)=\frac{\sigma\upsilon\nu x}{x}$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.

## Θέμα Γ

**Γ1.** Έστω $B(\beta,-\beta^2)$, $\beta<0$ τότε $OA \perp OB \Leftrightarrow \lambda_{OA}\cdot\lambda_{OB}=-1 \Leftrightarrow \frac{-\alpha^2}{\alpha}\cdot\frac{-\beta^2}{\beta}=-1 \Leftrightarrow \alpha\beta=-1 \Leftrightarrow \beta=-\frac{1}{\alpha}$

Άρα $B\left(-\frac{1}{\alpha},-\left(-\frac{1}{\alpha}\right)^2\right)$ ή $B\left(-\frac{1}{\alpha},-\frac{1}{\alpha^2}\right)$

$$(OAB)=\frac{1}{2}(OA)\cdot(OB)=\frac{1}{2}\sqrt{\alpha^2+\alpha^4}\sqrt{\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\alpha^4}}=\frac{1}{2}\alpha\sqrt{1+\alpha^2}\sqrt{\frac{\alpha^2+1}{\alpha^4}}=\frac{\alpha^2+1}{2\alpha}=E(\alpha),\alpha>0$$

**Γ2.** $E'(\alpha)=\frac{2\alpha\cdot 2\alpha-(\alpha^2+1)\cdot 2}{(\alpha^2+1)^2}=\frac{2\alpha^2-2}{(\alpha^2+1)^2}=\frac{2(\alpha+1)(\alpha-1)}{(\alpha^2+1)^2}$

$E'(\alpha)=0\overset{\alpha>0}{\Leftrightarrow}\alpha=1$ και $E'(\alpha)>0 \Leftrightarrow \alpha>1$

Η Ε είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,1]$ και γνησίως αύξουσα στο $[1,+\infty)$.

Άρα το εμβαδόν γίνεται ελάχιστο για α=1 με Ε(1)=1 .

**Γ3, α)** $\alpha'(t)=4t \Leftrightarrow \alpha'(t)=(2t^2)'$ άρα υπάρχει $c\in\mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $\alpha(t)=2t^2+c$

$\alpha(0)=\frac{1}{2}\Leftrightarrow c=\frac{1}{2}$ ,άρα $\alpha(t)=2t^2+\frac{1}{2}$.

Το εμβαδόν του ΟΑΒ παίρνει την ελάχιστη τιμή του για α=1, άρα

$\alpha(t_0)=1\Leftrightarrow 2t_0{}^2+\frac{1}{2}=1\Leftrightarrow t_0{}^2=\frac{1}{4}\Leftrightarrow t_0=\frac{1}{2}=0,5ec$

**β)** $E'(t)=\left(\frac{\alpha^2(t)+1}{2\alpha(t)}\right)'=\frac{2\alpha(t)\cdot\alpha'(t)(2\alpha(t))-(\alpha^2(t)+1)2\alpha'(t)}{4\alpha^2(t)}$ .

Για $t=t_0$ : $\alpha(t_0)=1$ , $\alpha'(t_0)=\alpha'(\frac{1}{2})=4\cdot\frac{1}{2}=2\ \frac{cm}{sec}$ , άρα $E'(t_0)=0$.

**Γ4.** $\lim\limits_{\alpha\to1}\left(e^{\frac{1}{1-E(\alpha)}}\cdot\eta\mu\left(\frac{1}{E(\alpha)-1}\right)\right)$

Θέτουμε $u=\frac{1}{1-E(\alpha)}$ με $\lim\limits_{\alpha\to1}u=\lim\limits_{\alpha\to1}\frac{1}{1-E(\alpha)}=-\infty$ γιατί $\lim\limits_{\alpha\to1}(1-E(\alpha))=0$ και

$E(\alpha)>1$ κοντά στο 1 άρα $1-E(\alpha)<0$ κοντά στο 1 ,οπότε

$\lim\limits_{u\to-\infty}(e^u\cdot\eta\mu(-u))=\lim\limits_{u\to-\infty}(-e^u\cdot\eta\mu u)=0$ γιατί

$|e^u\cdot\eta\mu u|=e^u|\eta\mu u|\le e^u\Leftrightarrow -e^u\le e^u\cdot\eta\mu u\le e^u$ και επειδή $\lim\limits_{u\to-\infty}e^u=0$, από το κριτήριο παρεμβολής είναι

και $\lim\limits_{u\to-\infty}(e^u\cdot\eta\mu u)=0\Leftrightarrow\lim\limits_{u\to-\infty}(-e^u\cdot\eta\mu u)=0$

## Θέμα Δ

**Δ1.** Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με

$$f'(x)=4x^3(1-x)^4+x^4\cdot 4(1-x)^3(1-x)'=4x^3(1-x)^4-4x^4(1-x)^3 \Leftrightarrow$$

$$f'(x)=4x^3(1-x)^3(1-x-x)=4x^3(1-x)^3(1-2x)$$

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow 4x^3(1-x)^3(1-2x)=0 \Leftrightarrow x=0 \text{ ή } x=1 \text{ ή } x=\frac{1}{2}$$

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $1/2$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $4x^3$ | | $-$ | 0 | $+$ | | $+$ | | $+$ | |
| $(1-x)^3$ | | $+$ | | $+$ | | $+$ | 0 | $-$ | |
| $1-2x$ | | $+$ | | $+$ | 0 | $-$ | | $-$ | |
| $f'$ | | $-$ | 0 | $+$ | 0 | $-$ | 0 | $+$ | |
| $f$ | | ↘ | | ↗ | | ↘ | | ↗ | |
| | | | T.E $f(0)=0$ | | T.M $f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{256}$ | | T.E $f(1)=0$ | | |

**Δ2.** Ισχύει $f(x)\ge 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ με την η ισότητα να ισχύει μόνο για x = 0 ή x = 1 οπότε το 0 είναι ολικό ελάχιστο της f.

Επομένως : $f\left(e^x-x-1\right)=0 \Leftrightarrow e^x-x-1=0\ (1)$ ή $e^x-x-1=1 \Leftrightarrow e^x-x-2=0\ (2)$

Γνωρίζουμε ότι για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι $e^x\ge x+1 \Leftrightarrow e^x-x-1\ge 0$ και η ισότητα ισχύει μόνο για x = 0, άρα η (1) έχει μοναδική λύση την x= 0.

Για την (2) θεωρούμε την συνάρτηση $g(x)=e^x-x-2,\ x\in\mathbb{R}$.

Η g είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $g'(x)=e^x-1$.

$g'(x)\ge 0 \Leftrightarrow e^x-1\ge 0 \Leftrightarrow e^x\ge 1 \Leftrightarrow x\ge 0$

Για κάθε x < 0 είναι $g'(x)<0$ και για κάθε x > 0 είναι $g'(x)>0$ οπότε, επειδή η g είναι συνεχής, είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,0]$ και γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$. Η g έχει ελάχιστο το $g(0)=-1$.

Είναι $\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(e^x-x-2\right)=+\infty$,

$$\lim_{x\to+\infty}g(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(e^x-x-2\right)=\lim_{x\to+\infty}\left[e^x\left(1-\frac{x}{e^x}-\frac{2}{e^x}\right)\right]=+\infty(1-0-0)=+\infty \text{ γιατί } \lim_{x\to+\infty}\frac{x}{e^x}\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{\underset{\text{DLH}}{=}}\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{e^x}=0.$$

Στο διάστημα $\Delta_1=(-\infty,0]$ η g είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα, οπότε έχει αντίστοιχο σύνολο τιμών το $g(\Delta_1)=[-1,+\infty)$. Το 0 βρίσκεται στο εσωτερικό του $g(\Delta_1)$, οπότε υπάρχει μοναδικό $x_1$ στο εσωτερικό του $\Delta_1$, τέτοιο, ώστε $g(x_1)=0$.

Στο διάστημα $\Delta_2=[0,+\infty)$ η g είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα, οπότε έχει αντίστοιχο σύνολο τιμών το $g(\Delta_2)=[-1,+\infty)$. Το 0 βρίσκεται στο εσωτερικό του $g(\Delta_2)$, οπότε υπάρχει μοναδικό $x_2$ στο εσωτερικό του $\Delta_2$, τέτοιο, ώστε $g(x_2)=0$.

Επομένως η εξίσωση $f\left(e^x-x-1\right)=0$ έχει τρείς ρίζες, τις x = 0, $x=x_1$, $x=x_2$.

**Δ3.** Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι $\left(\frac{1}{2}+x\right)\in\mathbb{R},\left(\frac{1}{2}-x\right)\in\mathbb{R}$.

Είναι $f\left(x+\frac{1}{2}\right)=\left(x+\frac{1}{2}\right)^4\left(1-x-\frac{1}{2}\right)^4=\left(x+\frac{1}{2}\right)^4\left(\frac{1}{2}-x\right)^4$ και

$f\left(\frac{1}{2}-x\right)=\left(\frac{1}{2}-x\right)^4\left(1-\frac{1}{2}+x\right)^4=\left(\frac{1}{2}-x\right)^4\left(x+\frac{1}{2}\right)^4$, άρα $f\left(x+\frac{1}{2}\right)=f\left(\frac{1}{2}-x\right)$ οπότε η $C_f$ έχει άξονα συμμετρίας την ευθεία $x=\frac{1}{2}$.

Η f είναι συνεχής στο $\left[0,\frac{1}{2}\right]$ και παραγωγίσιμη στο $\left(0,\frac{1}{2}\right)$, οπότε σύμφωνα με το Θ.Μ.Τ., υπάρχει $\xi_1\in\left(0,\frac{1}{2}\right)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi_1)=\dfrac{f\left(\frac{1}{2}\right)-f(0)}{\frac{1}{2}-0}$. Αλλά το $f'(\xi_1)$ είναι ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης (ε) της $C_f$ στο σημείο $M(\xi_1,f(\xi_1))$ και $\dfrac{f\left(\frac{1}{2}\right)-f(0)}{\frac{1}{2}-0}$ είναι ο συντελεστής διεύθυνσης της χορδής ΟΑ, οπότε ε//ΟΑ. Επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\left[0,\frac{1}{2}\right]$, είναι $f\left(\frac{1}{2}\right)>f(0)\Leftrightarrow$

$f'(\xi_1)=\dfrac{f\left(\frac{1}{2}\right)-f(0)}{\frac{1}{2}-0}>0$.

Είναι $f''(x)=4x^2(14x^2-14x+3)(1-x)^2=4x^2\left[14x(x-1)+3\right](1-x)^2$

Παρατηρούμε ότι για κάθε x > 1 είναι $f''(x)>0\Rightarrow f'\nearrow[1,+\infty)$.

Είναι $f'(1)=0$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=+\infty$, οπότε στο διάστημα $\Delta=[1,+\infty)$ η $f'$ έχει σύνολο τιμών το $f'(\Delta)=[0,+\infty)$. Επειδή $f'(\xi_1)>0$ το $f'(\xi_1)$ ανήκει στο σύνολο τιμών της $f'$, οπότε υπάρχει $\xi_2>1$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi_2)=f'(\xi_1)$.

Άρα υπάρχουν τουλάχιστον δύο εφαπτομένες της $C_f$ παράλληλες στην χορδή ΟΑ.

**2ος τρόπος**

Πρέπει να υπάρχουν $\xi_1,\xi_2\in\mathbb{R}$ τέτοια ώστε $f'(\xi_1)=f'(\xi_2)=\dfrac{f\left(\frac{1}{2}\right)-f(0)}{\frac{1}{2}}=\dfrac{1}{128}$.

Όμως $f'(x)>0$ στα διαστήματα $\left(0,\frac{1}{2}\right),(1,+\infty)$ οπότε $\xi_1,\xi_2\in\left(0,\frac{1}{2}\right),(1,+\infty)$ αντίστοιχα.

Η $f'$ συνεχής στο $\mathbb{R}$ άρα και στα διαστήματα $\left[0,\frac{1}{4}\right],[1,2]$.

$f'(0)=0<\dfrac{1}{128}<f'\left(\dfrac{1}{4}\right)=\dfrac{27}{32\cdot 64}$, $f'(1)=0<\dfrac{1}{128}<f'(2)=96$ οπότε ισχύει θεώρημα ενδιάμεσων τιμών άρα υπάρχουν $\xi_1,\xi_2\in\left(0,\frac{1}{4}\right),(1,2)$ αντίστοιχα. τέτοια ώστε $f'(\xi_1)=f'(\xi_2)=\dfrac{1}{128}$.

$\left(\dfrac{1}{\cancel{128}^{\,2}}<\dfrac{27}{32\cdot\cancel{64}}\Leftrightarrow 32<54\right.$ ισχύει)

**Δ4.** Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι $f(x)=x^4+(1-x)^4\Leftrightarrow x^4(1-x)^4=x^4+(1-x)^4$ (4)

Θέλουμε να λύσουμε την (4) στο $\mathbb{R}$ ώστε $x^4\in\mathbb{N}$ και $(1-x)^4\in\mathbb{N}$.

Αν x = 0 τότε η (4) γίνεται 0 = 1 και είναι αδύνατη.

Αν x = 1 τότε η (4) γίνεται $0=1$ και είναι αδύνατη.

Για $x\neq 0$ και $x\neq 1$ η (4) γίνεται: $\frac{x^4(1-x)^4}{x^4(1-x)^4}=\frac{x^4}{x^4(1-x)^4}+\frac{(1-x)^4}{x^4(1-x)^4}\Leftrightarrow 1=\frac{1}{(1-x)^4}+\frac{1}{x^4}$ (5)

Αν $(1-x)^4=\kappa\in\mathbb{N}$ και $x^4=\lambda\in\mathbb{N}$ τότε η (4) γίνεται $\frac{1}{\kappa}+\frac{1}{\lambda}=1$ (6) με $\kappa,\lambda\in\mathbb{N}-\{0,1\}$ αφού $x\neq 0$ και $x\neq 1$.

Τα κ = λ = 2 είναι λύση της (6) αφού $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$.

Αν $\kappa\geq 3$ τότε έχουμε $\frac{1}{3}+\frac{1}{\lambda}\geq\frac{1}{\kappa}+\frac{1}{\lambda}=1\Leftrightarrow\frac{1}{3}+\frac{1}{\lambda}\geq 1\Leftrightarrow\frac{1}{\lambda}\geq\frac{2}{3}\Leftrightarrow\lambda\leq\frac{3}{2}$ άρα λ = 0 ή λ = 1 που είναι άτοπο.

Άρα μοναδικές θετικές ακέραιες ρίζες της εξίσωσης είναι κ =2 και λ =2.

Οπότε $(1-x)^4=2\Leftrightarrow 1-x=\pm\sqrt[4]{2}\Leftrightarrow x=1\pm\sqrt[4]{2}$ και $x^4=2\Leftrightarrow x=\pm\sqrt[4]{2}$. Άρα δεν έχουν κοινή λύση.

Επομένως η εξίσωση $f(x)=x^4+(1-x)^4$ δεν μπορεί να έχει πραγματικές ρίζες με $x^4\in\mathbb{N}$ και $(1-x)^4\in\mathbb{N}$.

# 12ο Διαγώνισμα

## Θέμα Α

**Α1.** Έστω μια συνάρτηση $f$ ορισμένη σ' ένα διάστημα Δ και $x_0$ ένα εσωτερικό σημείο του Δ. Αν η $f$ παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο $x_0$ και είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό, τότε να αποδείξετε ότι: $f'(x_0)=0$

μονάδες 7

**Α2.** Πότε η ευθεία $y=\lambda x+\beta$ λέγεται ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της $f$ στο $+\infty$.

μονάδες 4

**Α3.** Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:
« Αν μια συνάρτηση f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη και κυρτή σε ένα διάστημα Δ, τότε $f''(x)>0$ για κάθε x στο εσωτερικό του Δ».

**α)** Είναι αληθής, ή ψευδής η πρόταση;
**β)** Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α.

μονάδες 1+3

**Α4.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη Σωστό, αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

**α)** Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)>0$ τότε $f(x)>0$ κοντά στο $x_0$.

**β)** Αν ένα σημείο $M(\alpha,\beta)$ ανήκει στη γραφική παράσταση μιας αντιστρέψιμης συνάρτησης f, τότε το σημείο $M'(\beta,\alpha)$ ανήκει στη γραφική παράσταση της $f^{-1}$.

**γ)** Αν μια συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα και συνεχής σε ένα ανοικτό διάστημα $(\alpha,\beta)$, τότε το σύνολο τιμών της στο διάστημα αυτό είναι το διάστημα $(A,B)$, όπου $A=\lim\limits_{x\to\alpha^+} f(x)$ και $B=\lim\limits_{x\to\beta^-} f(x)$.

**δ)** Κάθε συνάρτηση f συνεχής σε ένα σημείο του πεδίου ορισμού της είναι και παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό.

**ε)** Έστω δύο συναρτήσεις f,g ορισμένες σε ένα διάστημα Δ. Αν οι f,g είναι συνεχείς στο Δ και $f'(x)=g'(x)$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ τότε ισχύει $f(x)=g(x)$ για κάθε $x\in\Delta$.

μονάδες 10

## Θέμα Β

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x+\sqrt{x^2+x}$

**Β1.** Να εξετάσετε αν η f είναι παραγωγίσιμη στο πεδίο ορισμού της.

μονάδες 4

**Β2.** Να αποδείξετε ότι $f'(x)\neq 0$ Στη συνέχεια να εξετάσετε τη συνάρτηση ως προς τη μονοτονία και να δείξετε ότι είναι κοίλη σε κάθε ένα από τα διαστήματα του πεδίου ορισμού της.

μονάδες 6

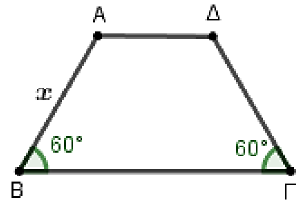
**Β3.** Να βρείτε τις ασύμπτωτες και αφού κάνετε το πίνακα μεταβολών να χαράξετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f.

μονάδες 10

**Β4.** Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=f(\alpha)+1$ έχει μοναδική λύση για κάθε $\alpha\in(-\infty,-1]\cup[0,+\infty)$

μονάδες 5

## Θέμα Γ




Δίνεται το ισοσκελές τραπέζιο ΑΒΓΔ του διπλανού σχήματος με $AB = \Gamma\Delta = x$ cm , $x \in (0,6)$, $\hat{B} = 60°$ και περίμετρο 20cm.

**Γ1.** Να αποδείξετε ότι $A\Delta = \dfrac{20-3x}{2}$ cm.

μονάδες 7

**Γ2.** Αν Ε το εμβαδόν του τραπεζίου, να αποδείξετε ότι $E(x) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\left(10x - x^2\right)$ cm$^2$.

μονάδες 5

**Γ3.**Έστω ότι ένα κινητό βρίσκεται στο σημεία Α. Αν κινείται επί της ΒΑ με ρυθμό 0,4cm την ώρα και στις 12 το μεσημέρι μιας ημέρας η πλευρά ΒΑ έχει μήκος 1cm, να βρείτε ποια ώρα της ημέρας το τραπέζιο θα έχει μέγιστο εμβαδό.

μονάδες 8

**Γ4.** Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδική χρονική στιγμή που το εμβαδόν του τραπεζίου είναι 8cm$^2$.

μονάδες 7

## Θέμα Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 + 2x - 1 - \eta\mu x,\ x \in \mathbb{R}$.

**Δ1.** Να αποδείξετε ότι η f είναι κυρτή.

μονάδες 3

Έστω ότι $f(x) \geq \lambda x - 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

**Δ2.** Να αποδείξετε ότι $\lambda = 1$.

μονάδες 5

**Δ3.** Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και $g(x) = -\dfrac{1}{3}x^3 + x - 1$ δέχονται κοινή εφαπτομένη.

μονάδες 5

**Δ4.** Να αποδείξετε για κάθε $x > 0$ είναι $\dfrac{1}{3}x^3 + x^2 + x > \eta\mu x$ .

μονάδες 6

**Δ5.** Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x^2 + 2x = 1 + \eta\mu x$ έχει δύο πραγματικές ρίζες.

μονάδες 6

# Λύσεις

## Θέμα Α

**Α1.** Ας υποθέσουμε ότι η $f$ παρουσιάζει στο $x_0$ τοπικό μέγιστο. Επειδή το $x_0$ είναι εσωτερικό σημείο του Δ και η $f$ παρουσιάζει σ' αυτό τοπικό μέγιστο, υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο, ώστε $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subseteq \Delta$ και

$f(x) \le f(x_0)$, για κάθε $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. (1)

Επειδή, επιπλέον, η $f$ είναι παραγωγίσιμη στο $x_0$, ισχύει $f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0^-} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim\limits_{x \to x_0^+} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$.

Επομένως,

— αν $x \in (x_0 - \delta, x_0)$, τότε, λόγω της (1), θα είναι $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \ge 0$, οπότε θα έχουμε

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \ge 0 \qquad (2)$$

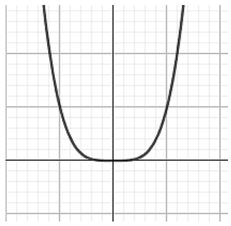
— αν $x \in (x_0, x_0 + \delta)$, τότε, λόγω της (1), θα είναι $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \le 0$, οπότε θα έχουμε

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \le 0. \qquad (3)$$

Έτσι, από τις (2) και (3) έχουμε $f'(x_0) = 0$. Η απόδειξη για τοπικό ελάχιστο είναι ανάλογη.

**Α2.** Η ευθεία $y = \lambda x + \beta$ λέγεται ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της $f$ στο $+\infty$, αν $\lim\limits_{x \to +\infty} \left[ f(x) - (\lambda x + \beta) \right] = 0$.

**Α3. α)** Ψευδής



**β)** Έστω η συνάρτηση $f(x) = x^4$, $x \in \mathbb{R}$. Είναι $f''(x) = 12x^2$ και η f είναι κυρτή, όμως δεν είναι αρνητική στο 0 αφού $f''(0) = 0$.

**Α4.** α) Σ β) Σ γ) Λ δ) Λ ε) Λ

## Θέμα Β

**Β1.** Πρέπει $x^2 + x \ge 0 \Leftrightarrow x \le -1$ ή $x \ge 0$ άρα Α$=(-\infty, -1] \cup [0, +\infty)$

$$\lim_{x \to -1^-} \frac{f(x) - f(-1)}{x+1} = \lim_{x \to -1^-} \frac{x + \sqrt{x^2 + x} + 1}{x+1} \overset{\frac{0}{0}}{\underset{DL}{=}} \lim_{x \to -1^-} \left(1 + \frac{2x+1}{2\sqrt{x^2 + x}}\right) = -\infty \quad \text{και}$$

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(-1)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^+} \frac{x + \sqrt{x^2 + x}}{x} \overset{\frac{0}{0}}{\underset{DL}{=}} \lim_{x \to 0^+} \left(1 + \frac{2x+1}{2\sqrt{x^2 + x}}\right) = +\infty$$ οπότε δεν είναι παραγωγίσιμη στο -1 και στο 0. Στο $(-\infty, -1) \cup (0, +\infty)$ είναι παραγωγίσιμη ως σύνθεση και πράξεις παραγωγίσιμων με

$$f'(x) = \frac{2x+1}{2\sqrt{x^2 + x}} + 1.$$

**Β2.** Για x> 0 είναι $f'(x) = \dfrac{2x+1}{2\sqrt{x^2 + x}} + 1 > 0$ οπότε και $f'(x) \ne 0$

Για x <-1 είναι $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{2x+1}{2\sqrt{x^2 + x}} + 1 = 0 \Leftrightarrow 2x + 1 = -2\sqrt{x^2 + x} \Leftrightarrow (2x+1)^2 = 4(x^2 + x) \Leftrightarrow 1 = 0$

άτοπο και άρα στο (-∞ ,-1) είναι $f'(x) \ne 0$ και ως συνεχής διατηρεί πρόσημο στο (-∞ ,-1).

Επειδή $f'(-2)=\frac{-3}{2\sqrt{2}}+1=\frac{-3+2\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}<0$ είναι $f'(x)<0$ για x < -1 .

Η f όμως είναι συνεχής στο $(-\infty,-1]\cup[0,+\infty)$ ως σύνθεση και πράξεις συνεχών συνεπώς θα είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,-1]$ και γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$ .

Είναι $f''(x)=-\frac{1}{4\sqrt{(x^2+x)^3}}<0$ και άρα στο $(-\infty,-1]$ και στο $[0,+\infty)$ είναι κοίλη.

**B3.** Η f συνεχής στο $(-\infty,-1]\cup[0,+\infty)$ άρα δεν έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη.

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(x+\sqrt{x^2+x})=+\infty$ δεν έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$

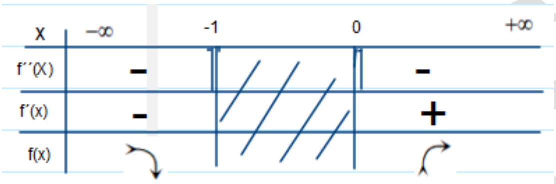
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+\sqrt{x^2+x}}{x}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{x\sqrt{1+\frac{1}{x}}}{x}\right)=2 \text{ και}$$

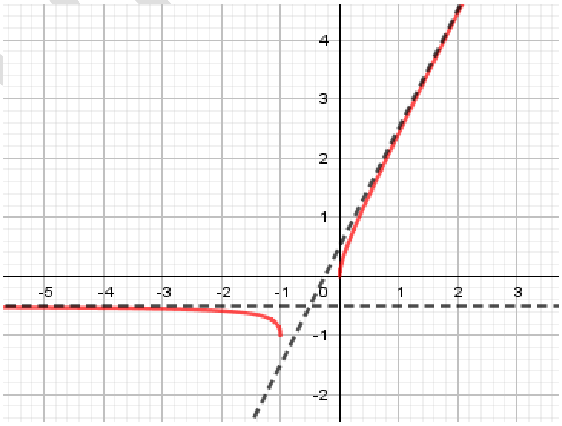
$$\lim_{x\to+\infty}(f(x)-2x)=\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+x}-x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+x}+x}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{x(\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1)}\right)=\frac{1}{2}$$, οπότε πλάγια

ασύμπτωτη στο $+\infty$ η: $y=2x+\frac{1}{2}$

Είναι $$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}(x+\sqrt{x^2+x})=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x}{-x+\sqrt{x^2+x}}\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x}{x(-1-\sqrt{1+\frac{1}{x}})}\right)=-\frac{1}{2}$$

άρα η $y=-\frac{1}{2}$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της $C_f$ στο $-\infty$



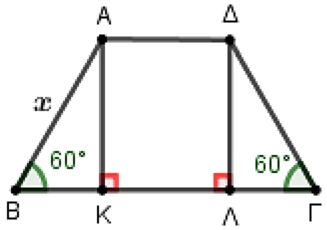

**B4.** Η f συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $A_1=(-\infty,-1]$ και άρα έχει αντίστοιχο σύνολο τιμών το $f(A_1)=[f(-1),\lim\limits_{x\to-\infty}f(x))=[-1,-\frac{1}{2})$.

Επειδή είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής στο $A_2=[0,+\infty)$ έχει αντίστοιχο σύνολο τιμών το $f(A_2)=[f(0),\lim\limits_{x\to+\infty}f(x))=[0,+\infty)$.

Τότε όμως το $f(\alpha)+1\geq 0$ οπότε ανήκει μόνον στο $f(A_2)$ όπου η f είναι γνησίως αύξουσα και άρα η εξίσωση $f(x)=f(\alpha)+1$ έχει μοναδική λύση.

## Θέμα Γ

**Γ1.** Έστω ΑΔ = y cm. Κατασκευάζουμε τα ύψη ΑΚ και ΔΛ του τραπεζίου. Είναι $\sigma\upsilon\nu 60° = \frac{BK}{x} \Leftrightarrow \frac{1}{2} = \frac{BK}{x} \Leftrightarrow BK = \frac{x}{2}$.




Όμοια και $\Gamma\Lambda = \frac{x}{2}$.

Επειδή η περίμετρος του τραπεζίου είναι 20cm, ισχύει ότι

$$A\Delta + AB + B\Gamma + \Gamma\Delta = 20 \Leftrightarrow A\Delta + x + \left(\frac{x}{2} + A\Delta + \frac{x}{2}\right) + x = 20 \Leftrightarrow$$

$$2A\Delta + 3x = 20 \Leftrightarrow 2A\Delta = 20 - 3x \Leftrightarrow A\Delta = \frac{20-3x}{2}\ \text{cm}$$

**Γ2.** Είναι $\eta\mu 60° = \frac{AK}{x} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{AK}{x} \Leftrightarrow AK = \frac{\sqrt{3}}{2}x$ cm.

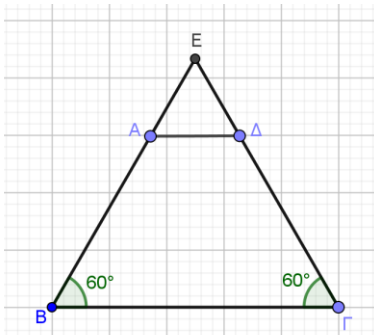
Το εμβαδόν του τραπεζίου είναι:

$$E(x) = \frac{(B\Gamma + A\Delta)AK}{2} = \frac{\left(A\Delta + \frac{x}{2} + \frac{x}{2} + A\Delta\right)\frac{\sqrt{3}}{2}x}{2} = \frac{\left(\cancel{2}\frac{20-3x}{\cancel{2}} + x\right)\frac{\sqrt{3}}{2}x}{2} = \frac{(20-2x)\frac{\sqrt{3}}{2}x}{2} \Leftrightarrow$$

$$E(x) = \frac{\cancel{2}(10-x)\frac{\sqrt{3}}{\cancel{2}}x}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}(10x - x^2)$$

ή

**Γ1.** Έστω Ε το σημείο τομής των μη παραλλήλων πλευρών του τραπεζίου. Τα τρίγωνα ΑΔΕ και ΕΒΓ είναι ισόπλευρα αφού έχουν δύο γωνίες ίσες με $60^{\circ}$ .Αν $A\Delta = y$ ,τότε :




$EA = E\Delta = y, EB = E\Gamma = B\Gamma = x + y$.

Η περίμετρος του τραπεζίου είναι 20cm οπότε,

$$A\Delta + AB + B\Gamma + \Gamma\Delta = 20 \Leftrightarrow y + x + x + y + x = 20 \Leftrightarrow$$

$$2y + 3x = 20 \Leftrightarrow 2y = 20 - 3x \Leftrightarrow y = \frac{20-3x}{2} = A\Delta.$$

**Γ2.** Έχουμε: $B\Gamma = x + y = x + \frac{20-3x}{2} = \frac{20-3x+2x}{2} = \frac{20-x}{2}$

Το εμβαδόν του τραπεζίου είναι:

$$E(x) = (B\Gamma E) - (A\Delta E) = \frac{\left[\frac{(20-x)}{2}\right]^2\sqrt{3}}{4} - \frac{\left[\frac{(20-3x)}{2}\right]^2\sqrt{3}}{4} =$$

$$\frac{\sqrt{3}}{16}\cdot\left[(20-x)^2 - (20-3x)^2\right] = \frac{\sqrt{3}}{16}\cdot(20-x+20-3x)(20-x-20+3x) =$$

$$\frac{\sqrt{3}}{16}\cdot(40-4x)\cdot 2x = \frac{\sqrt{3}}{16}\cdot 8\cdot(10x - x^2) = \frac{\sqrt{3}}{2}(10x - x^2)$$

**Γ3. 1ος τρόπος**

Η συνάρτηση Ε είναι παραγωγίσιμη στο $(0,6)$ με $E'(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}(10-2x)$.

$$E'(x) \geq 0 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}(10-2x) \geq 0 \Leftrightarrow 10 - 2x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 5$$

Για κάθε $x \in (0,5)$ είναι $E'(x) > 0$ και επειδή η Ε είναι συνεχής στο $(0,5]$, είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα αυτό.

Για κάθε $x \in (5,6)$ είναι $E'(x) < 0$ και επειδή η Ε είναι συνεχής στο $[5,6)$, είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα αυτό.

Η Ε παρουσιάζει μέγιστο για $x = 5\text{cm}$.

Επειδή στις 12 το μεσημέρι η ΑΒ είχε αρχικό μήκος 1cm, και μέγιστο εμβαδό έχει το τραπέζιο όταν $x = 5$ μετέβαλε το μήκος της κατά 4cm. Επειδή κάθε ώρα αυξάνει το μήκος της κατά 0,4 cm, θα χρειαστεί $t = \frac{4}{0,4} = \frac{4}{\frac{4}{10}} = 10$ ώρες για αυτή τη μεταβολή, οπότε στις 10 το βράδυ της ίδιας ημέρας το τραπέζιο θα έχει το μέγιστο εμβαδό.

**2ος τρόπος**

Επειδή το x αυξάνεται με ρυθμό 0,4cm/h, είναι $x'(t) = 0,4 \Leftrightarrow x(t) = 0,4t + c,\ c \in \mathbb{R}$

Είναι $x(12) = 1 \Leftrightarrow 1 = 4,8 + c \Leftrightarrow c = -3,8$, οπότε $x(t) = 0,4t - 3,8$.

Επειδή $x(t) \in (0,6)$ είναι $0 < 0,4t - 3,8 < 6 \Leftrightarrow 9,5 < t < 24,5$. Όμως η ΑΔ αρχίζει να αυξάνει στις 12 το μεσημέρι, οπότε $t \in [12\ ,\ 24,5)$ Τότε

$$E(t) = \frac{\sqrt{3}}{2} x(t)(10 - x(t)) = \frac{\sqrt{3}}{2}(0,4t - 3,8)(10 - 0,4t + 3,8) = \frac{\sqrt{3}}{2}(0,4t - 3,8)(13,8 - 0,4t),$$

$t \in [12\ ,\ 24,5)$

Είναι $E'(t) = \frac{\sqrt{3}}{2}\left[0,4(13,8 - 0,4t) - 0,4(0,4t - 3,8)\right] = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 0,4(13,8 - 0,4t - 0,4t + 3,8) \Leftrightarrow$

$E'(t) = 0,2 \cdot \sqrt{3}(17,6 - 0,8t)$

Είναι $E'(t) \geq 0 \Leftrightarrow 17,6 - 0,8t \geq 0 \Leftrightarrow t \leq 22$.

Όταν $t \in (12\ ,\ 22)$ είναι $E'(t) > 0 \Rightarrow E \nearrow [12\ ,\ 22]$ και για $t \in (22\ ,\ 24,5)$ είναι $E'(t) < 0 \Rightarrow E \searrow [22\ ,\ 24,5)$.

Το εμβαδόν Ε γίνεται μέγιστο τη χρονική στιγμή $t = 22$, δηλαδή στις 10 το βράδυ της ίδιας ημέρας.

**Γ4.** Αρκεί να υπάρχει μοναδικό $t_0 \in [12\ ,\ 24,5)$ τέτοιο ώστε $E(t_0) = 8$

Είναι $E(12) = \frac{9\sqrt{3}}{2}$, $E(22) = \frac{25\sqrt{3}}{2}$ και $\lim\limits_{t \to 24,5} E(t) = 12\sqrt{3}$.

Στο διάστημα $\Delta_1 = [12, 22]$ η Ε είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα, οπότε έχει αντίστοιχο σύνολο τιμών το $E(\Delta_1) = \left[\frac{9\sqrt{3}}{2}, \frac{25\sqrt{3}}{2}\right]$.

Στο διάστημα $\Delta_2 = (22,\ 24,5)$ η Ε είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα, οπότε έχει αντίστοιχο σύνολο τιμών το $E(\Delta_2) = \left(12\sqrt{3}, \frac{25\sqrt{3}}{2}\right)$.

Τώρα θα εξετάσουμε το 8 σε ποιο από τα $E(\Delta_1)$, $E(\Delta_2)$ ανήκει.

Για να ανήκει στο $E(\Delta_1)$ πρέπει $\frac{9\sqrt{3}}{2} \leq 8 \leq \frac{25\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \frac{81 \cdot 3}{4} \leq 64 \leq \frac{625 \cdot 3}{4} \Leftrightarrow 243 \leq 256 \leq 1875$ ισχύει.

Για να ανήκει στο $E(\Delta_2)$ πρέπει $12\sqrt{3} \leq 8 \leq \frac{25\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow 144 \cdot 3 \leq 64 \leq \frac{635 \cdot 3}{4}$ αδύνατο

Επειδή το 8 περιέχεται στο $E(\Delta_1)$ υπάρχει μοναδική χρονική στιγμή $t_0 \in (12, 22)$ τέτοιο ώστε $E(t_0) = 8$.

## Θέμα Δ

**Δ1.** Η f είναι παραγωγίσιμη με $f'(x)=2x+2-\text{συν}x$ . Η $f'$ είναι επίσης παραγωγίσιμη με $f''(x)=2+\text{ημ}x$ . Επειδή $-1\le \text{ημ}x\le 1$ , είναι $f''(x)>0 \Rightarrow f'(x)\nearrow\mathbb{R} \Leftrightarrow f\cup\mathbb{R}$

**Δ2.** Έστω $h(x)=f(x)-\lambda x+1$ . Είναι $f(x)\ge \lambda x-1 \Leftrightarrow f(x)-\lambda x+1\ge 0 \Leftrightarrow h(x)\ge h(0)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ , άρα η h παρουσιάζει ελάχιστο στο $x=0$ που είναι εσωτερικό σημείο του πεδίου ορισμού της.
Επειδή η h είναι παραγωγίσιμη με $h'(x)=f'(x)-\lambda=2x+2-\text{συν}x-\lambda$ , λόγω του Θεωρήματος Fermat είναι $h'(0)=0 \Leftrightarrow 2-1-\lambda=0 \Leftrightarrow \lambda=1$ .

**Δ3.** Επειδή η f είναι κυρτή και ισχύει ότι $f(x)\ge x-1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ υποψιαζόμαστε ότι η ευθεία ε: $y=x-1$ είναι εφαπτομένη της $C_f$ . Είναι $f'(0)=2\cdot 0+2-\text{συν}0=2-1=1=\lambda_\varepsilon$ .
Η εφαπτομένη της $C_f$ στο $x=0$ έχει εξίσωση $y-f(0)=f'(0)x \Leftrightarrow y=x-1$ .
Είναι $g'(x)=-x^2+1$ και $g'(x)=\lambda_\varepsilon \Leftrightarrow -x^2+1=1 \Leftrightarrow x=0$ . Επειδή $g(0)=-1=f(0)$ και $g'(0)=1$ η ευθεία ε είναι κοινή εφαπτομένη των $C_f, C_g$.

**Δ4.** $\frac{1}{3}x^3+x^2+x>\text{ημ}x \Leftrightarrow x^2+2x-1-\text{ημ}x>-\frac{1}{3}x^3+x-1 \Leftrightarrow f(x)>g(x)$
Είναι $g''(x)=-2x<0$ για κάθε $x>0$ άρα $g\cap[0,+\infty)$ . Επειδή η g είναι κοίλη στο $[0,+\infty)$ , βρίσκεται κάτω από κάθε εφαπτομένη της στο διάστημα αυτό εκτός του σημείου επαφής τους, άρα $g(x)<x-1$ για κάθε $x>0$ . Όμως η ε είναι εφαπτομένη της $C_f$ και η f είναι κυρτή, οπότε βρίσκεται πάνω από κάθε εφαπτομένη της εκτός του σημείου επαφής τους, άρα $f(x)>x-1$ για κάθε $x\ne 0$ , άρα για κάθε $x>0$ είναι $f(x)>x-1>g(x)$ .

**Δ5.** $x^2+2x=1+\text{ημ}x \Leftrightarrow f(x)=0$

Είναι $\lim\limits_{x\to-\infty} f'(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[x\left(2+\frac{2}{x}-\frac{\text{συν}x}{x}\right)\right]=-\infty$ γιατί $\left|\frac{\text{συν}x}{x}\right|=\frac{|\text{συν}x|}{|x|}\le\frac{1}{|x|} \Leftrightarrow -\frac{1}{|x|}\le\frac{\text{συν}x}{x}\le\frac{1}{|x|}$ και από κριτήριο παρεμβολής είναι $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\text{συν}x}{x}=0$ .

Όμοια $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[x\left(2+\frac{2}{x}-\frac{\text{συν}x}{x}\right)\right]=+\infty$ .

Επειδή η $f'$ είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ έχει αντίστοιχο σύνολο τιμών το $f'(\mathbb{R})=\left(\lim\limits_{x\to-\infty} f'(x), \lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)\right)=\mathbb{R}$ . Άρα υπάρχει μοναδικό $x_1: f'(x_1)=0$ .

Για κάθε $x<x_1 \overset{f'\nearrow}{\Leftrightarrow} f'(x)<f'(x_1)=0 \Rightarrow f\searrow(-\infty,x_1]$ και για κάθε $x>x_1 \overset{f'\nearrow}{\Leftrightarrow} f'(x)>f'(x_1)=0 \Rightarrow f\nearrow[x_1,+\infty)$.

Είναι $f'(0)=2-\text{συν}0=1$ και $f'(-1)=-2+2-\text{συν}(-1)=-\text{συν}1<0$ , λόγω του Θ.Bolzano, η εξίσωση $f'(x)=0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $(-1,0)$, όμως το $x_1$ είναι η μοναδική ρίζα της $f'$, άρα $x_1\in(-1,0)$ .

Είναι $f(0)=-1<0,\ f(1)=2-\text{ημ}1>0$ , άρα λόγω του Θ.Bolzano, η εξίσωση $f(x)=0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο $(0,1)\subseteq[x_1,+\infty)$ . Όμως η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[x_1,+\infty)$ οπότε η ρίζα αυτή είναι μοναδική σε αυτό το διάστημα.

Είναι $f(-1)=-2-\text{ημ}(-1)=-2+\text{ημ}1<0$ , $f\left(-\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi^2}{4}-\pi-1+1=\frac{\pi^2}{4}-\pi<0$ ,

$f(-\pi)=\pi^2-2\pi-1>0$ , δηλαδή $f\left(-\frac{\pi}{2}\right)f(-\pi)<0$ οπότε λόγω του Θ.Bolzano, η εξίσωση $f(x)=0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο $\left(-\pi,-\frac{\pi}{2}\right)\subseteq(-\infty,x_1]$ . Επειδή η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,x_1]$, η προηγούμενη ρίζα είναι μοναδική.

Τελικά η εξίσωση $f(x)=0$ έχει ακριβώς δύο ρίζες.